BACCALAUREAT BLANC	Durée : 4 heures
SESSION FEVRIER 2003	Coefficient : 5

MATHEMATIQUES

SERIE : C

Cette épreuve comporte deux pages . le candidat recevra deux feuilles de papier millimétré. Toute calculatrice scientifique est autorisée. Les calculatrices graphiques sont interdites.

EXERCICE 1 (5,5 points)

Partie A

1°. Soit $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 1+i\sqrt{3}$. Ecrire z_1, z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme trigonométrique .

2°. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{5\pi}{12}$

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal directe $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. Unité graphique 4 cm.

M est un point du plan d'affixe z, et I le point du plan tel que $\overrightarrow{OI}=\vec{u}$.

1°.a. Caractériser géométriquement l'ensemble (D) des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z|=|z-1|$.
Donner une équation de (D).

b. Démontrer que si $|z|=|z-1|$ alors $z(z-1)$ est un réel strictement négatif.

c. En déduire que $\arg(z)+\arg(z-1)=\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

2°. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z : $z^3=i(z-1)^3$.

a. Quelle relation existe-t-il entre le module de z et celui de z-1 ?

b. A quel ensemble appartiennent les point images des solutions de (E) ?

3°.a. On pose $Arg(z)=\theta$. Justifier que $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

b. Exprimer z en fonction de $|z|$ et de θ, puis $z-1$ en fonction de $|z-1|$ et de θ .

c. Calculer θ lorsque (E) est vérifiée.

4°. Construire les points images des solutions de (E) en utilisant les résultats des questions **2°** et **3°**.

5°. Donner les solutions de (E) sous forme trigonométrique en utilisant les résultats de **partie A**.

EXERCICE 2 (4,5 points)

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB=a et AC=$2a$. I désigne le milieu de [AC] et G le barycentre du système { (A,3) ; (B,-2) ; (C,1) }.

1°. a. Construire le point G et préciser la nature du quadrilatère ABIG.

b. Exprimer en fonction de a les distances GA, GB et GC.

2°. A tout point M du plan, on associe le nombre réel : $f(M)=3MA^2-2MB^2+MC^2$.

a. Exprimer f(M) en fonction de MG et de a.

b. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $f(M)=2a^2$.

3 °. A tout point M du plan, on associe maintenant le nombre réel : $h(M)=3MA^2-2MB^2-MC^2$

a. Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{U}$ non nul tel que : $h(M)=\overrightarrow{MB}.\vec{U}-2a^2$.

b. On désigne par (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que : $h(M)=-2a^2$.

Vérifier que les points I et B appartiennent à (Δ) ; préciser la nature de cet ensemble. Construire (Δ).

4°. (Δ) et (Γ) sont sécants en deux points E et F. Montrer que les triangles GEC et GFC sont équilatéraux.

 Tournez la page S.V.P.

PROBLEME (10 points)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$ et $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

On note (C) et (Γ) les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

Partie A : Etude des fonctions f et g.

1°.a. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes à (C).

b. Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

c. Prouver que le point Ω de coordonnées $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de (C).

d. On note (T) la tangente à (C) au point Ω. Déterminer une équation de (T).

e. Représenter (T) et (C).

2°.a. En observant que, pour tout réel x, on a $g(x)=f(-x)$, montrer que (Γ) est l'image de (C) par une symétrie que l'on déterminera.

b. Vérifier que, pour tout réel x, on a $f(x)+g(x)=1$.

En déduire que (Γ) est l'image de (C) par une autre symétrie que l'on déterminera.

c. Déterminer une équation de la tangente (T') à (Γ) au point Ω.

d. Représenter (T') et (Γ) sur la figure de la question **1°**.

Partie B : Calcul d'une aire

On note $\mathrm{I}=\int_0^1 f(t)dt$ et $\mathrm{J}=\int_0^1 g(t)dt$.

1°. En utilisant l'égalité de la question **A.2.b)**, calculer I+J.

2°.a. Montrer que, pour tout nombres réel t, $\dfrac{1}{1-e^{-t}}$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{e^{t}}{e^{t}+1}$.

b. En déduire une primitive G de g sur $\mathbb{R}$, puis la valeur de J.

3°. Calculer la valeur de I.

4°.a. Prouver que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0;+\infty[$, $f(x)\leq g(x)$.

b. On note Δ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x,y) vérifient :

$$\begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ f(x)\leq y\leq g(x) \end{cases}$$

On note **A** l'aire, exprimée en cm², du domaine Δ. Exprimer **A** en fonction de I et J.
Donner une approximation décimale de **A** à 10^{-2} près.

Partie C : Etude d'une fonction définie par une intégrale

On considère les fonctions h et H définies sur $[0;+\infty[$ par : $h(x)=e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$ et $H(x)=\int_0^x h(t)dt$.

1°.a. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0;+\infty[$, $h(x)$ est strictement positif.

b. En déduire que H est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2°. On note h' la fonction dérivée de h.

a. Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0;+\infty[$, $h(x)=h'(x)+g(x)$.

b. En déduire $H(x)$ en fonction de x.

3°.a. Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0;+\infty[$, $h(x)=\dfrac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{e^{-x}}$.

En déduire la limite de h en $+\infty$

b. Déterminer la limite de H en $+\infty$. Prouver finalement que $\lim\limits_{x\to+\infty}(H(x)-x)=1-2\ln 2$.

Interpréter graphiquement ce dernier résultat