SESSION JUIN 2007

EXERCICE 1

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par $U_0 = 4$ et $V_0 = 9$ et pour tout entier naturel n :

$U_{n+1}=\frac{2U_n V_n}{U_{n+}V_n}$, V_{n+1}

1. Démontrer par récurrence que tout entier naturel n , $U_n > 0$ et $V_n > 0$
2. a) Démontrer que : $\forall n \in N, V_{n+1}$ - U_{n+1}
   b) En déduire que : $\forall n \in N, U_n \leq V_n$
   et que V_{n+1} -$U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n$
   c) En déduire que :$\forall n \in N$, V_n
3. a) Démontrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

   b) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) convergent.

   c) Démontrer que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite l.
4. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} V_{n+1} = U_n V_n$

   b) En déduire la valeur exacte de l

Exercice 2

Une population d'élèves comportant 40% de bacheliers a subi un test de recrutement en première année d'une grande école.

Ce test a donné les résultats suivants :

*75% des bacheliers sont admis ;

*52% des non bacheliers admis.

Partie A

On choisit au hasard un élève de la population. On note :

B l'évènement : « l'élève est bachelier » ;

T l'évènement : « l'élève est admis au test » ;

A l'évènement : « l'élève est bachelier et est admis au test ».

1. Préciser chacune des probabilités suivantes :
   a) La probabilité P(B) de l'évènement B ;
   b) La probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B n'est pas réalisé ;
   c) La probabilité $P_B(T)$ sachant que B n'est pas réalisé.
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,3
3. Calculer la probabilité de l'évènement T.

4. Déduire des questions précédentes que les évènements B et T ne sont pas indépendants.
5. Démontré que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est égal à (25/51).

Partie B

On choisit au hasard 5 élèves de la population étudiée.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'étudiants bacheliers et admis au test parmi les 5 choisis.

1. Démontrer que la probabilité pour que 3 seulement des 5 élèves choisis soient bacheliers et admis au test est égale à 0, 1323.
2. Calculer l'espérance mathématique de x.

PROBLEME

L'objet de ce problème est l'étude de chacune des fonctions f, g et h définies ci-dessous.

*f est la fonction dérivable et définie sur R - $\{-1\}\, par : f(x) = \frac{x-3}{x+1}$

*g est la fonction définie sur l'ensemble Dg = $\left[0;\frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e};+\infty\right[\; par \; g(x) = f(lnx) et \; g(0) = 1$

*h est la fonction dérivable sur R et définie par h(x) = f(e^x)

Partie A

1. Démontrer que :
   a) $\forall x \in Dg \; et \; x \neq 0, g(x) = 1 - \frac{4}{lnx+1}$
   b) $\forall x \in R \, , h(x) = 1 - \frac{4}{e^x}$
2. a) Déterminer Lim f(x) et Lim(x)
   c) Déterminer Lim f(x) et Lim f(x)
3. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

Partie B

On note (C_g) la représentation graphique de g dans le plan muni du repère orthogonal

R_1 = (O, I, J)

L'unité sur (OI) est 1 cm et sur (OJ) est 2 cm.

1) a. Démontrer que g est continue en 0.

   b. Démontrer (Cg) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.
2) a. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.
   b. Déterminer $\lim_{\substack{x\to\frac{1}{e} \\ <}} g(x)$et $\lim_{\substack{x\to\frac{1}{e} \\ >}} g(x)$ puis donner une interprétation du

   résultat.

3) Démontrer que g est strictement croissante puis dresser son tableau de variation.
4) Tracer (Cg) et son asymptote dans le repère R_1

Partie C

On note (C_h) la représentation graphique de h dans le plan muni du repère orthonormé R_2 = (O, I, J) l'unité est graphique est 1 cm.

1) Déterminer Lim h(x) et Lim h(x) , puis interpréter graphiquement les résultats.
2) Démontrer que, pour tout nombre réel $x, h'(x) = \frac{4e^x}{(1+e^x)}$
3) En déduire les variations de h puis dresser son tableau de variation
4) On note A et B les points d'intersection respectifs de (C_h) avec les droites (OI) et (OJ).
   a) Déterminer les coordonnées de chacun des point A et B.
   b) Démontrer qu'une équation de la (T) à (Ch) en B est y= x-1
   c) Démontrer que B est un centre de symétrie de (Ch). Déterminer l'expression explicite de la bijection réciproque h^{-1} de h.
5) a. Démontrer que h réalise une bijection de R sur intervalle que l'on précisera.
   b. Déterminer l'expression explicite de la bijection réciproque h^{-1} de h.

6) a. Tracer (T), (Ch) et ses asymptotes dans le repère R_2.

   b. En déduire la représentation graphique () de la fonction réciproque h^{-1} dans le repère R_2.