BACCALAUREAT **Durée : 4 heures**
SESSION 2003 **Coefficient : 5**

MATHEMATIQUES

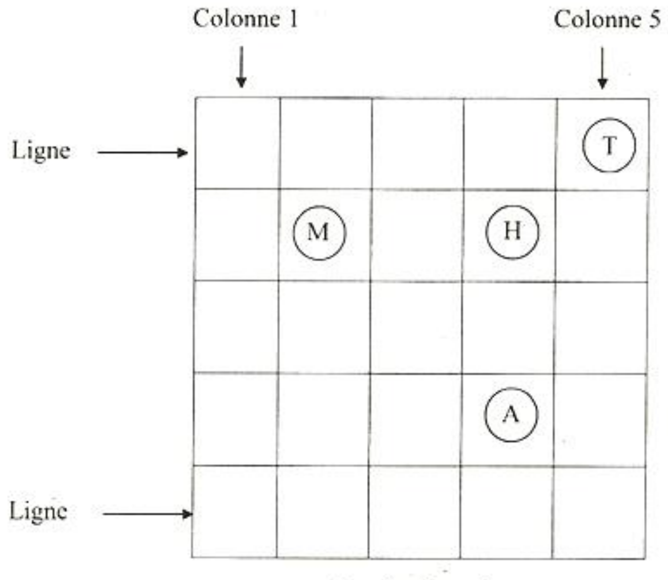
SERIE : C

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Le candidat recevra ***2 feuilles*** *de papier millimétré.*
Toute calculatrice *est autorisée.*

EXERCICE 1

On dispose d'un damier de 5 cases sur 5 placé dans une position fixe. On place au hasard sur ce damier 4 jetons portant les lettres du mot MATH (Voir figure ci-dessous). Les jetons sont posés sur des cases différentes. (*Les résultats des calculs seront donnés sous forme de fractions irréductibles*).

1) Justifier que le nombre de dispositions possibles des 4 jetons est égal à 303 600.
2)
   a) Calculer la probabilité pour que les 4 jetons soient disposés sur une même ligne.
   b) Calculer la probabilité pour qu'on puisse lire le mot MATH sur une ligne ou une colonne.
   (*On convient que la lecture se fait de gauche à droite sur une ligne, de bas en haut sur une colonne et que deux lettres consécutives du mot MATH peuvent être séparées par un espace*).
3) Démontrer que la probabilité pour que deux jetons ne soient jamais placés sur une même ligne est égale à $\frac{125}{506}$.
4) Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de jetons placés sur la première ligne.
   a) Etablir la loi de probabilité de X.
   b) Démontrer que l'espérance mathématique de X est égale à 0,8.



Damier 5 sur 5

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère le triangle isocèle ABC tel que :

AB = AC et Mes ($\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}$) = $\frac{\pi}{4}$.

Soit I le point du plan tel que le triangle CAI est isocèle rectangle en C et Mes ($\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}}$) = $-\frac{\pi}{2}$.

1) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure. On prendra AB = 5 cm.
2) On appelle r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

   On pose $f = r_C \circ r_A$.

   a) Déterminer les images respectives des points A et B par f.
   b) Démontrer que f est une rotation et préciser son angle.

3) Démontrer que Mes ($\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}$) = $\frac{\pi}{2}$.

4) On appelle O le symétrique de A par rapport à (BC).

   a) Démontrer que le quadrilatère ABOC est un losange.
   b) Démontrer que O appartient à la médiatrice du segment [AI] .

5) Démontrer que O est le centre de la rotation f.

PROBLEME

On considère la fonction f dérivable sur ℝ et définie par $f(x) = (1 - x)e^{-2x+4}$.
Soit Γ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 2 cm.
Le but du problème est la recherche d'une valeur approchée d'une solution de l'équation f(x) = -1.

I. *Etude de la fonction f*

1)
   a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
   b) Calculer $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.
   c) Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2)
   a) Calculer f '(x) et dresser le tableau de variation de f.
   b) Démontrer que l'équation f(x) = -1 admet une solution unique α dans l'intervalle $]1 ; \frac{5}{4}[$.
   c) Démontrer que : $\alpha = 1 + e^{2\alpha - 4}$.

3) Soient A et B les points de Γ d'abscisses respectives 1 et 2.
   a) Donner une équation de la tangente (D) à Γ en B.
   b) Tracer (D) et Γ sur l'intervalle [0,5 ; + ∞ [.

4) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $F(x) = \frac{2x-1}{4}e^{-2x+4} - \frac{e^2}{4}$.

b) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan comprise entre le segment [AB] et Γ.

II. *Recherche d'une valeur approchée de α.*

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = e^{2x-4} + 1$.

On note I l'intervalle $[1 ; \frac{5}{4}]$.

1)

a) Calculer $g'(x)$ et préciser le sens de variation de g.

b) Démontrer que : $g(I) \subset I$.

c) Démontrer que pour tout élément x de I, on a : $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$.

(On pourra étudier le sens de variation de g' sur I)

d) En déduire, en utilisant l'inégalité des accroissements finis et le résultat de la question I.2.c), que pour tout élément x de I, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

2) On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout entier naturel } n, \ u_{n+1} = g(u_n). \end{cases}$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est élément de I.

Démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

3)

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.

b) En déduire que la suite u est une suite convergente. Quelle est sa limite ?

4) Déterminer n pour que u_n soit une valeur approchée de α au centième près.