COLLEGE MODERNE EUREKA DE SIKENSI
LYCEE MUNICIPAL DE SIKENSI
B.P. : 60 Sikensi - Tél : 23 57 09 50

Année Scolaire 2007 - 2008

Classe : Tle

EXERCICE SUR LES COMPLEXES

EXERCICE I

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{u})$ (unité graphique : 2 cm).
On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et 4.
L'application f associe à tout point M d'affixe z de P, distinct de A, le point M' d'affixe z définie par :

$$z = \frac{z-4}{z-1}$$

1°) Soit C le point d'affixe $i\sqrt{2}$. Déterminer l'affixe de C' = f(C).

2°) Déterminer que f admet deux points invariants I et J. (On notera I celui d'ordonnée positive). (On rappell qu'un point M est dit "invariant " par f lorsque f (M) = M). Placer les points I, J, C et C'.

3°) Donner une interprétation géométrique de $|Z|$, $|Z-4|$, $|Z-1|$.
En déduire l'ensemble D des points M d'affixe Z tels que $|Z| = 1$
Que peut-on dire de l'ensemble des images des points M de D ? Construire D.

4°) On pose Z = x + i y et Z= X + I Y avec x, y, X, Y réels.
a) Déterminer X et Y en fonction de x et y
b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
c) Déterminer et construire l'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

EXERCICE II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{u})$.

1) Résoudre dans C l'équation (1) : $\frac{z-2}{z-1} = z$
On donnera le module et un argument de chaque solution

2) Résoudre dans C l'équation (2) : $\frac{z-2}{z-1} = i$
On donne la résolution sous forme algébrique.

3) Soit M, A et les points d'affixes respectives z, 1 et 2.
On suppose que M est distinct des points A et B.
a) Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{z-2}{z-1}$.
b) Retrouver géométriquement la solution de l'équation (2).

4) a) Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution dans C de l'équation. $\left(\frac{Z-2}{Z-1}\right)^n = i$, où n désigne un entier naturel non nul donné, a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.

c) Résoudre alors dans C l'équation (3) : $\left(\frac{Z-2}{Z-1}\right)^2 = i$.
On cherchera les solutions sous forme algébrique.