LYCEE MUNICIPAL DE SIKENSI   Année Scolaire 20.. - 20..

Classe : Tle C   Durée : Heures

DEVOIR DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Le candidat recevra 2 feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

Exercice 1

On considère la suite (J_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \int_{-1}^{1}\left(t^2-1\right)^n dt$.

1) Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n,
   a) J_n est positif si n est pair.
   b) J_n est négatif si n est impair.
2) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad J_n = 2\int_{0}^{1}\left(t^2-1\right)^n dt$.
3) Calculer J_0, J_1 et J_2.
4) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \frac{-2n}{1+2n} J_{n-1}$.
5) Retrouver J_1 et J_2 connaissant J_0.
6) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \frac{(-1)^n \times n! \times 2^{n+1}}{3\times 5\times 7\times \ldots \times (2n+1)}$.

Exercice 2

Le quadrilatère OHKL est un rectangle de sens direct tel que : OH = 2LO. La médiatrice de [OK] coupe (OH) en E et (OL) en F. Le cercle ($\mathscr{C}$) de centre E passant par O recoupe (OH) en A. Le cercle ($\mathscr{C}'$) de centre F passant par O recoupe (OL) en O'. S est la similitude directe qui applique A sur O et O sur O'.

1) Démontrer que l'angle de S mesure $-\frac{\pi}{2}$.
2) Démontrer que : $(\mathscr{C}) \cap (\mathscr{C}') = \{O;K\}$.
3) Déterminer le centre de la similitude S.

Tournez la page S.V.P.

4) Démontrer que : S(H) = L et en déduire le rapport de S.
5) Déterminer l'image du point E par S.
6) Soit M un point de (OH) distinct des points O et A. On admet que le cercle passant par O, K et M recoupe (OL) en M'. Démontrer que : S(M) = M'.

Problème

Dans tout le problème, les fonctions étudiées sont dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$ *et ln désigne la fonction logarithme népérien.*

Partie A

On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=1+\frac{1}{x^2}-2\ln x$.

1) Calculer les limites de h en $+\infty$ et à droite en 0.
2) On note h' la dérivée de h ; démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ h'(x)=\frac{-2(1+x^2)}{x^3}$.
3) Démontrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique x_0 dans $]1;+\infty[$.
4) En déduire le signe de h.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2(1-\ln x)+1+\ln x$.
1) Calculer les limites de g en $+\infty$ et à droite en 0.
2) On note g' la dérivée de g ; démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ g'(x)=xh(x)$.
3) Démontrer que : $g(x_0)>0$.
4) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique x_1 dans $]0;1[$.
5) On admet que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique x_2 dans $]x_0;+\infty[$.
   a) Déterminer le signe de g.
   b) Démonter que : $x_1 \in]0,3;0,4[$ et $x_2 \in]3,3;3,4[$.

Partie C

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(0)=0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0;+\infty[,\ f(x)=\frac{x\ln x}{1+x^2}.$$

1) Démontrer que f est continue à droite en 0 mais non dérivable à droite en 0.
2) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement ce résultat.